



TITLE:

半無限格子を過ぎる粘性流 (流体方程式の特異性)

AUTHOR(S):

石井, 克哉

CITATION:

石井, 克哉. 半無限格子を過ぎる粘性流 (流体方程式の特異性). 数理解析研究所講究録 1977, 302: 10-22

ISSUE DATE:

1977-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103821>

RIGHT:

半無限格子を過ぎる粘性流

東大 理 石井 克哉

§ 1 はじめに

粒子の集合に対し、相対的に運動する流体の問題は、興味深い問題であるが、a) 流体の性質、b) 粒子の性質、c) volume concentration d) 容器の壁の影響など、多くの条件が考えられなければならない。¹⁾

ここでは、粒子の流体力学的な相互作用をみるため、粘性流体中に rigid な粒子が、dilute に、しかし流体の入った充分大きな容器一杯に振が、て存在する場合を考える。こうした状況の 1 つの model である規則正しく配列した粒子に一定の流れが当る場合については、Hasimoto (1959)²⁾ が論じている。

そこでは、粒子の中心は次の様に表わされている。

$$\vec{r}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$$

$$(n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は 配列の unit cellをつくる 基本ベクトルである。

粒子に働く抵抗は、流体の平均流速 \vec{U}_0 に基づくストークスの抵抗則からのずれとして求められる。

$$F_j = 6\pi\mu a U_{0j} (1 + k_j a/l + O((a/l)^2))$$

となっている。

μ は粘性率, a は粒子を球とした時の半径, U_0 は平均流速, k_j は定数, l は配列の unit cellを表わす長さである。 l を unit cell の体積の $1/3$ 乗とすれば, k_j は 普通 $O(1)$ の量となっている。また dilute の仮定より $a/l \ll 1$ である。

以下では、配列の条件を緩めた場合について、粒子に働く抵抗を考える。考える配列の中で、基本的なものは次の様な形をしている。

$$\vec{r}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$(n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ただし、 \vec{a}_1, \vec{a}_2 は 流体の平均流に垂直だとする。後で述べるように、この配列を重ね合せて、多くの配列の場合を考えることができる。

以下、§2 で、一般的な場合の抵抗の式を導き、§3 で、二つの例を計算した結果を示す。

§ 2. Formulation

粒子は簡単のため球と考え、球の中心が次の様な位置にある場合を考える。

$$\vec{r}_n^{(\alpha)} = n_1 \vec{a}_1^{(\alpha)} + n_2 \vec{a}_2^{(\alpha)} + \vec{a}_3^{(\alpha)}$$

$$(n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

α は有限個または可算無限個の値をとるものとする。この時、 $\vec{a}_1^{(\alpha)}, \vec{a}_2^{(\alpha)}, \vec{a}_3^{(\alpha)}$ は α をパラメータとして方向や大きさを变化させることができるが、次の条件を満たす。

$$1) (\vec{a}_1^{(\alpha)}, \vec{e}_z) = (\vec{a}_2^{(\alpha)}, \vec{e}_z) = 0$$

$$2) \vec{a}_1^{(\alpha)}, \vec{a}_2^{(\alpha)} \text{ は独立}$$

$$3) \min \| \vec{r}_n^{(\alpha)} - \vec{r}_m^{(\beta)} \| \text{ は 球から流体への力を point-force とする近似が成立する程大きいものとする。 (粒子の大きさの数倍程度)}$$

ただし、 \vec{e}_z は平均流の方向とした。

つまり、ある規則性を持って粒子が配列した膜が幾層も積み重な、ている所に、流体が垂直に当たる場合を考えるのである。

粒子同士の interaction に依る抵抗の変化を reflection の方法で考えることにする。interaction ~~の最初~~ ^{を置き最初} の近似項は、他の粒子がストークスレットとして流体に及ぼす力の影響である。このため、この項を求めるには creeping motion

equation (ストークス方程式) の中に, point force の外力として粒子の影響を入れて考えれば充分である。

そこで, 基本方程式として次式を使う。

$$(2.1) \quad \begin{cases} \mu \Delta \vec{U} = \vec{\nabla} p + \sum_{\alpha, n} \vec{F}_n^{(\alpha)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n^{(\alpha)}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \end{cases}$$

$$z \rightarrow \pm \infty \quad \text{で} \quad \vec{U} \rightarrow U_0 \vec{e}_z$$

ここで, μ は粘性率, p は圧力, \vec{U} は流速, $\vec{F}_n^{(\alpha)}$ は α, n で特長づけられる球に働く力を示す。

$\vec{F}_n^{(\alpha)}$ を既知とすれば, 方程式の線型性より (2.1) の解は

$$\vec{U} = U_0 \vec{e}_z + \sum_{\alpha} \vec{U}^{(\alpha)} \quad \text{と表わされる。} \quad \vec{U}^{(\alpha)} \text{ は}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mu \Delta \vec{U} = \vec{\nabla} p + \sum_n \vec{F}_n^{(\alpha)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n^{(\alpha)}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \end{cases}$$

$$z \rightarrow \pm \infty \quad \text{で} \quad \vec{U} \rightarrow 0$$

の解である。しばらく, 1つの α に対する $\vec{U}^{(\alpha)}$ を考えることとし, α を略して書くことにする。また, 1つの近似として \vec{F}_n は n 依存しないとして考える。これについては後で考察する。

\vec{r}_n の周期性を考慮し, \vec{U} , $-\text{grad } p$ etc を z 方向にはFourier積分, x - y 平面については \vec{a}_1, \vec{a}_2 に依る=重Fourier級数に展開する。

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{l_1, l_2}^{\infty} \vec{U}_l e^{-2\pi i \vec{l} \cdot \vec{r}} \\ -\vec{\nabla} p &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum_{l_1, l_2}^{\infty} \vec{P}_l e^{-2\pi i \vec{l} \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

ここで、 $\vec{l} = l_1 \vec{q}_1 + l_2 \vec{q}_2 + l_3 \vec{e}_z = \vec{q}_1 + l_3 \vec{e}_z$

\vec{q}_1 は \vec{a}_1, \vec{a}_2 でつくられる = 次元の格子の逆格子ベクトルである。(2.2) は 次の様に変換される。

$$(2.3) \quad \begin{cases} -4\pi^2 \mu l^2 \vec{U}_l = -\vec{P}_l + \vec{F}_l / \tau_0 \cdot e^{2\pi i \vec{a}_3 \cdot \vec{l}} \\ \vec{l} \cdot \vec{U}_l = 0 \\ \vec{l} \times \vec{P}_l = 0 \end{cases}$$

$$\tau_0 = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$$

$\vec{q} = 0$ の場合 $\vec{P}_l = \vec{P}_{(0,0,l)} = (\vec{F}_l / \tau_0) e^{2\pi i l \vec{a}_3 \cdot \vec{e}_z}$

となってい、 $z = z_0 (= \vec{a}_3 \cdot \vec{e}_z)$ の平面で、^{階段}的に変化するような圧力が与えられている。この圧力の変化の大きさは粒子から受けている力の大きさとつり合っており、 $z \rightarrow \pm\infty$ で $U \rightarrow 0$ の解が得られることを保証する。

Hasimoto の論文においては粒子は全空間に分布しているので、対応する基本的な圧力場としては平均流の方向に粒子の抵抗力和つり合う一定の傾きを持つ圧力場を取っている。

こうして (2.2) の解としては、

$$(2.4) \quad \begin{cases} U_j = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(F_j S_1 - F_i \frac{\partial^2 S_2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ -(\text{grad } p)_j = F_j \delta(z-z_0) - \frac{1}{4\pi\mu} F_i \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_i \partial x_j} \end{cases}$$

を得る。($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ とし、各項の中で二度使われた添字については和をとるものとする。)

$$(2.5) \quad \begin{cases} S_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum'_{l_1, l_2} \frac{1}{l^2} e^{-2\pi i \vec{l} \cdot (\vec{r} - \vec{a})} \\ S_2 = -\frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sum'_{l_1, l_2} \frac{1}{l^4} e^{-2\pi i \vec{l} \cdot (\vec{r} - \vec{a}_3)} \end{cases}$$

\sum' は $(l_1, l_2) = (0, 0)$ を除くすべての l_1, l_2 の組についての和を示す。また

$$\Delta S_2 = S_1, \quad \Delta S_1 = -4\pi \left(\sum_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) - \delta(\vec{r} - \vec{z}_0) \right)$$

である。

静止した粒子を point force で置き換える近似において、粒子附近の流れは一様流とそれに依ってつくられるストークスレットの流れの二つの部分で表わせる。今、 $\vec{r}_{n_0}^{(\alpha)}$ に中心を持つ球附近の流れを考えることとする。一様流のオ0次近似として $U_0 \vec{e}_z$ ($z \rightarrow \pm\infty$ での流れ) をとることにすると、 $\vec{F}_{n_0}^{(\alpha)}$ のオ0次近似としては $6\pi\mu d U_0 \vec{e}_z$ が出る。一様流部分の次の近似は、このオ0次近似のストークスレットの集合 ($\vec{F}_{n_0}^{(\alpha)}$ は除く) が注目している粒子附近につくり出す流れ $\vec{U}_{n_0}^{(\alpha)}$ であり、 $\vec{F}_{n_0}^{(\alpha)}$ のオ1次の近似項は $6\pi\mu d \vec{U}_{n_0}^{(\alpha)}$ である。

このformulation において 基本方程式(2.1) はストークスレットの集合がつくり出す流れ $\vec{U}_{n_0}^{(\alpha)}$ を求めるために使用されている。上記の様に近似をオ1次の項でとめるならば、(2.1)の $\vec{F}_n^{(\alpha)}$ には オ0次近似のストークスレット $6\pi\mu d U_0 \vec{e}_z$ を用いればよい。このため、(2.2)以下の議論を使うことができる。

注目する粒子を原点にとり、その属する α を α_0 とするとこの粒子の抵抗 $\vec{F}_0^{(\alpha_0)}$ は次のようになる。

$$(2.6) \quad \frac{\vec{F}_0^{(\alpha_0)}}{6\pi\mu a U_0} = \vec{e}_z + \frac{\vec{U}_0^{(\alpha_0)}}{U_0} + O(a^2/\beta) \\ = \vec{e}_z + \frac{3}{2}a \left\{ \sum_{j=1}^3 (C\delta_{j3} - C_{j3}) \vec{e}_j \right\} + O(a^2/\beta)$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{2\sqrt{\theta}}{\tau_0^{(\alpha_0)}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n' \phi_{-1/2} \left(\frac{\pi |\vec{r}_n^{(\alpha_0)}|^2}{\beta} \right)$$

$$- \frac{\theta}{\tau_0^{(\alpha_0)}} \sum_n' A_n - \sum_\alpha' S_1^{(\alpha)}$$

$$C_{j3} = \frac{1}{2} (C + \sum_\alpha' S_1^{(\alpha)}) \delta_{j3} - \sum_\alpha' \frac{\partial^2 S_2^{(\alpha)}}{\partial x_j \partial x_3}$$

ここで、 \sum_n' は $(n_1, n_2) = (0, 0)$ を除くすべての組に対する和を、 \sum_α' は $\alpha = \alpha_0$ を除く考えているすべての α に対する和を表わす。また、

$$\tau_0^{(\alpha_0)} = |\vec{a}_1^{(\alpha_0)} \times \vec{a}_2^{(\alpha_0)}|$$

$$\phi_\nu(x) = \int_1^\infty \xi^\nu e^{-x\xi} d\xi$$

$$A_\ell = \int_0^\infty dk \phi_0(\pi\beta |\vec{l}|^2) = \frac{1}{\beta |\vec{q}_\ell|} \operatorname{erfc}(\sqrt{\pi\beta} |\vec{q}_\ell|) \\ (\vec{a}_3^{(\alpha_0)} = 0 \text{ より})$$

$S_1^{(\alpha)}, S_2^{(\alpha)}$ は (2.5) の α について $\gamma \equiv 0$ の時の値を示す。

β は、Evalet の手法を使用した時用いたパラメータで面積の

次元を持つ。通常の配列においては、 β を $\tau_0^{(\infty)}$ にと、とあければ、 $\vec{U}_0^{(\infty)}/U_0$ は $0/\sqrt{\tau_0^{(\infty)}}$ の order となっている。

上式は、 $|\vec{U}_0^{(\infty)}/U_0|$ が $o(1)$ の時のみ成立することに注意する必要がある。

次に具体的な例を見る。

§3 半無限格子を過ぎる流れと一枚の膜を過ぎる流れ

§2 の中で与えた式を用いて A) 半無限格子, B) 一枚の膜 という二つの配列の中での粒子の受ける抵抗を求める。

A) 半無限格子

空間全体に広がる格子の半分を切り取り、た場合を考える。

球の中心は

$$\vec{r}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3 \quad \text{である。}$$

$$\left(\begin{array}{l} n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n_3 = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

これに \vec{a}_1, \vec{a}_2 に垂直な方向の流れが当るようにする。格子が切れている影響は、異なる n_3 の粒子の抵抗を見ればよい。S.C.L (simple cubic lattice), F.C.L (face centered cubic lattice), B.C.L (body centered cubic lattice) の三つの場合について計算した値を表1に掲げる。

空間全体に拡がっている場合のHasimotoの結果と比較してみると、異なる n_3 の膜 (§2の言い方では異なる α) からの影響は、互方向に指数的に減少していることがわかる。また、流れの方向からみて重なり合うような粒子配列同士はお互いの抵抗を減しあい、バラバラになっているような粒子配列同士は抵抗を増加しあうことも、B.C.L, F.C.L の例よりわかる。

B) 一枚の膜 (一つの α しかない時)

球の中心は

$$\vec{r}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 \quad \text{である。}$$

$$(n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$a_1 = |\vec{a}_1| = 1, 0 < a_2 = |\vec{a}_2| \leq 1$, \vec{a}_1, \vec{a}_2 のなす角 θ が $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合の抵抗の大きさを図1に、 $a_1 = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ の時 $0 < a_2 \leq 1$ と a_2 を変化させたときの抵抗の大きさの変化を図2に示した。

粒子の並び方がかたよってくると $\vec{F}_{n_0}^{(\alpha_0)}$ の一次近似の項の正負が逆転するのは興味深い。これは、粒子が流れに垂直に拡がって分布しているためにおこる抵抗を増大させる傾向と、二つの粒子が近接しているときおこすお互いの抵抗を減小させようとする傾向の二つが存在するためだと考えられる。

均一に粒子が分布している場合、各粒子の backflow とか return flow とか呼ばれる流れをどの粒子も避けるれず同じ様に受け流しているが、配列にかたよりが生じると、粒子がすこししかいない部分を^{多量の}流体が流れ、このため多くの粒子に働く抵抗は減るのだといえる。

ただし、(2.6) は $(\tilde{U}/U_0) \ll 1$ の条件で導かれているため、図1, 2において $a_2 \approx 0$ の附近の値は信用できない(a の値に依存するが)ことに注意する必要がある。

この研究にあたり、橋本英典教授をはじめ 金田行雄助手等橋本研究室の人々に有益な指導、助言をいただいたことに感謝いたします。

[1] J. Happel and H. Brenner, Low Reynolds number hydrodynamics, Noordhoff 1973

[2] H. Hasimoto, J. Fluid Mech. 5 (1959) 317

表1 半無限格子 $\vec{r}_n = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$ ($n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 $n_3 = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{cases} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{cases} = \text{S.C.L.} \begin{cases} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{cases} \quad \text{B.C.L.} \begin{cases} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases} \quad \text{F.C.L.} \begin{cases} (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0) \\ (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$n_3 \backslash$	α ($F_{n_3} = 6\pi\mu a D_0(1 + \alpha \cdot a)$)		
	S. C. L.	B. C. L.	F. C. L.
1	2.88124	3.28222	4.3608
2	2.83743	3.68068	4.59067
3	2.83728	3.63687	4.5847
4	2.837287	3.6393	4.584814
5		3.63919	4.584809
6		3.6392	4.5848
7		3.639205	4.584808

無限格子の場合
 $(n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$
 Hasimoto (1959)

図1

一枚膜に当る流れによる抵抗

$$F = 6\pi\mu a U_0 (1 + \alpha C^{1/2})$$

$$C = \frac{4}{3}\pi a^3 / 2a\tau_0$$

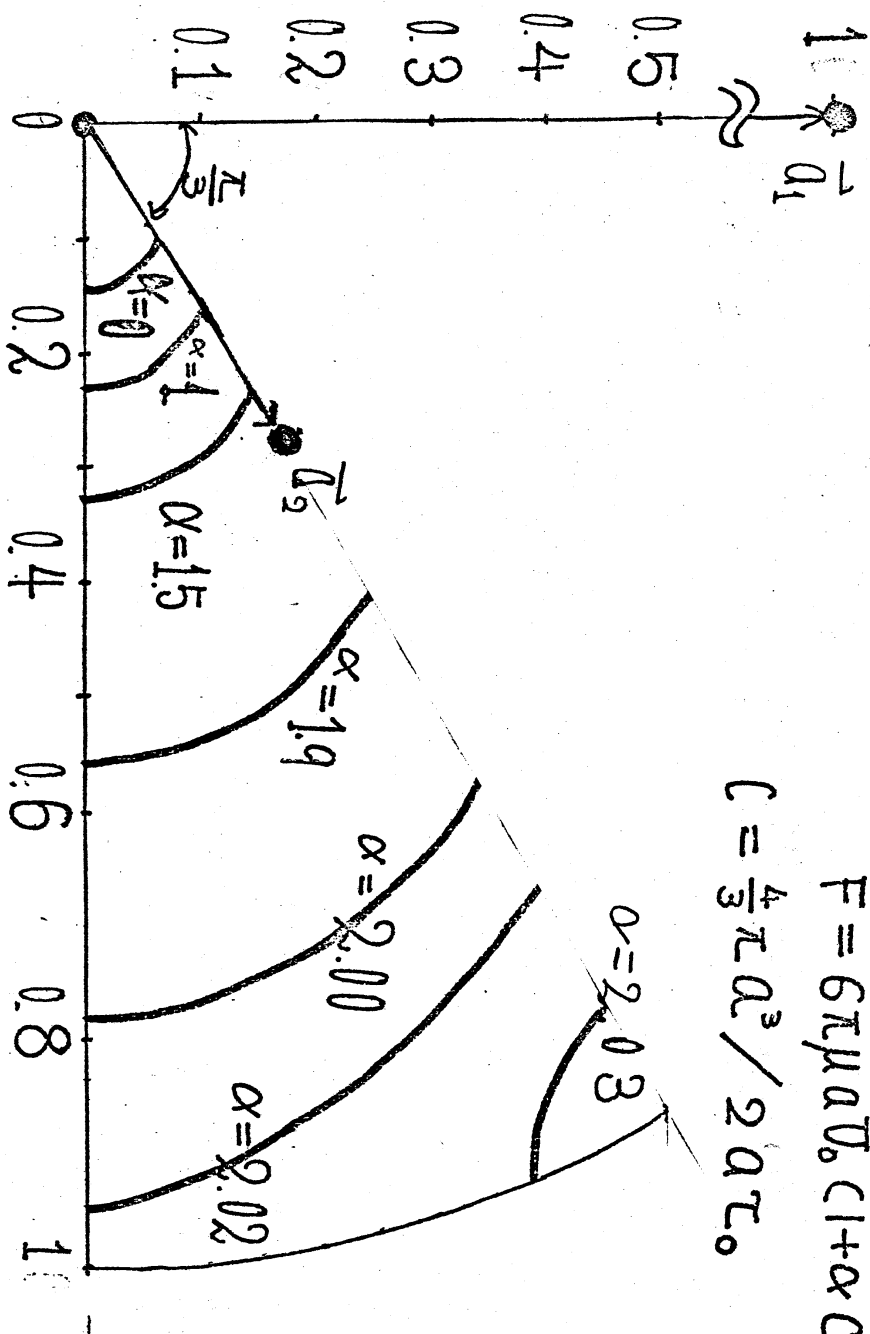
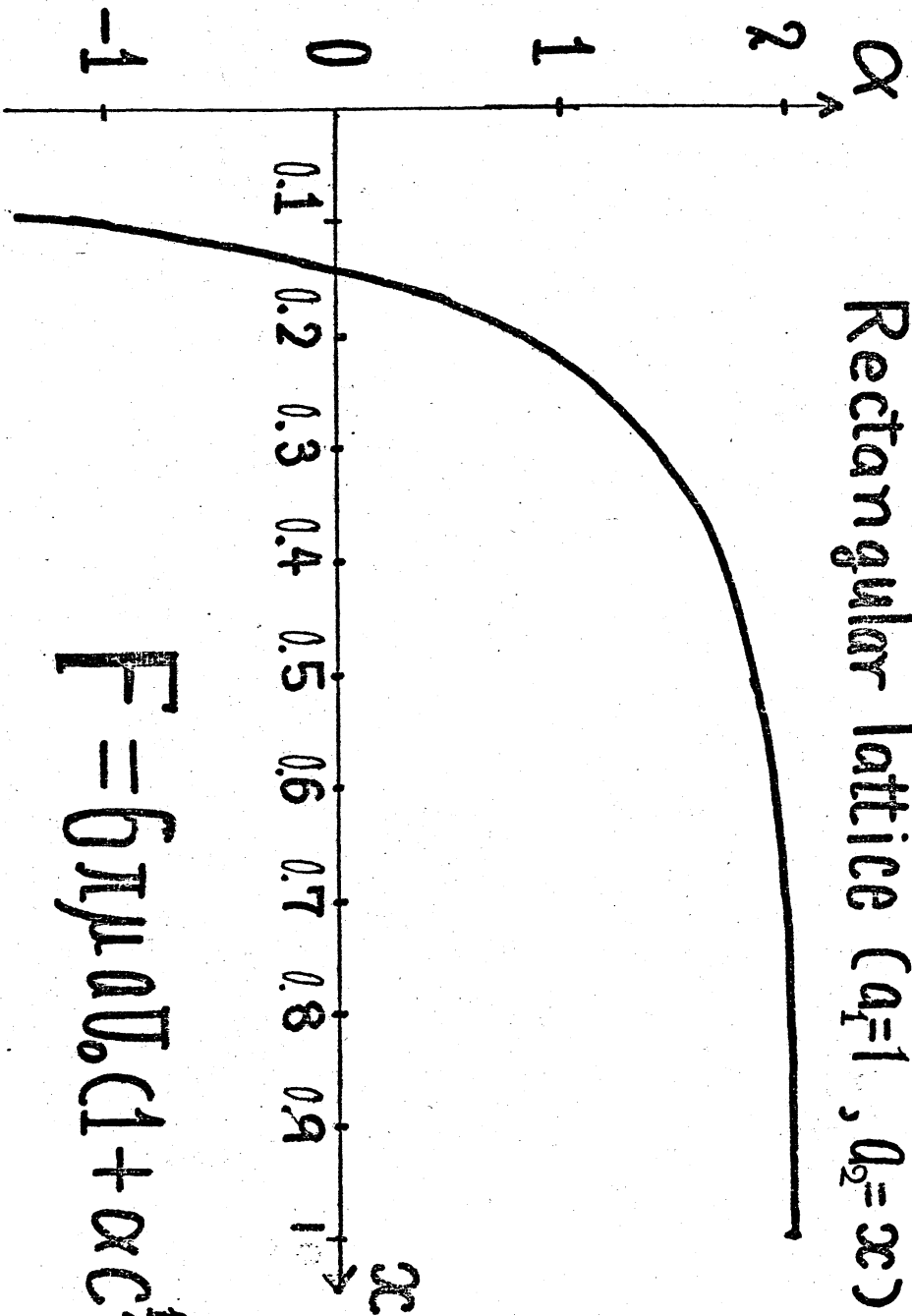


图 2

Rectangular lattice ($a_1=1$, $a_2=x$)



$$F = 6\pi\mu a U_0 (1 + \alpha C^{1/2})$$